AnW Woche 14

Nicolas Wehrli
30.05.2024

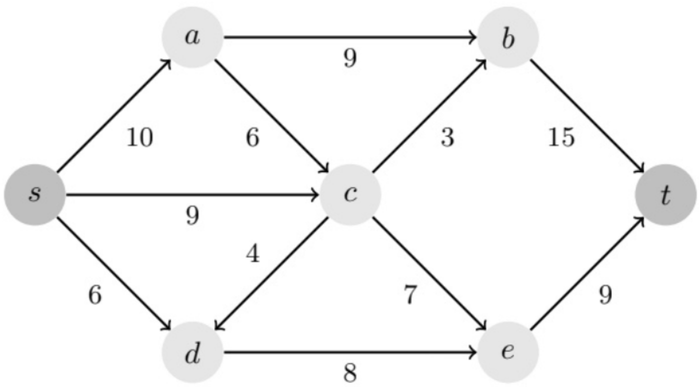
I. Feedback
II. Kurze Kommentare zu T6
III. FS 17
IV. Fragen zu AnW oder Studium allg.
(Pläuderle)

V. 2. Stunde im ML D 28
Grosses Kahoot mit den anderen Gruppen
– Lösung mit Erklärungen werden später auf die Polybox/Webseite hochgeladen

II. Kurze Kommentare zu T6

Wieder gut gelöst.

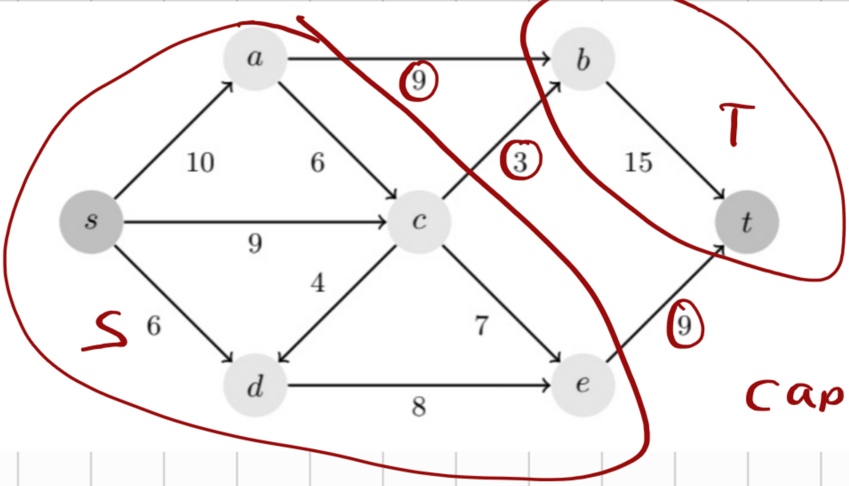
Zur Erinnerung:



Auf einigen Netzwerkkanten ist eine nichtnegative Funktion f gegeben durch

(x,y)	(s,a)	(s,c)	(s,d)	(a,c)	(d,e)	(b,t)
$f(x,y)$	10	7	0	5	2	8

(d) Beweisen Sie, dass Ihr Fluss maximal ist, indem Sie einen Minimalen Schnitt im Netzwerk finden.



$cap(S,T) = 9+3+9$
$= 21$

Es gilt $val(f) \leq cap(S,T)$ für alle (S,T)-Schnitte und Flüsse f in $\mathcal{N}$.

$\Longrightarrow$ $val(f) = cap(S,T) \Longrightarrow f$ ist maximal.

(e) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Sei $N = (V, A, c, s, t)$ ein Netzwerk mit mindestens einem $s - t$ Pfad, und sei f ein maximaler Fluss in N. Falls keine Kantenkapazität in N ganzzahlig ist, dann ist f kein ganzzahliger Fluss.

Definition von ganzzahliger Fluss war nicht ganz klar.
↳ wird zum Skript hinzugefügt.

Intuition: der Fluss f ist eine Funktion
$f: A \to \mathbb{R}_0^+$.

Wenn gefragt ist: f ganzahlig $\Leftrightarrow f: A \to \mathbb{N}_0$

$\Leftrightarrow f(e)$ ganzahlig für alle $e \in A$.

$\left(val(f) = \sum_{v \in V: (s,v) \in A} f(s,v) \right.$ ganzzahlig macht keinen Sinn$)$

III. FS17

Vom letzten Mal (da ich Fragen bekommen habe):

Aufgabe 1 – ***Multiple Choice***

$G = (V, E)$ bezeichnet immer einen Graphen mit n Knoten und m Kanten. X und Y bezeichnen immer eine Zufallsvariable. Wir nehmen an, dass alle vorkommenden Werte (Erwartungswerte, bedingte Wahrscheinlichkeiten, ...) wohldefiniert sind.

Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr, welche nicht? *Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.*

1. Man kann in Zeit $O(m + n)$ entscheiden, ob ein Graph G 2-zusammenhängend ist, falls G als Adjazenzliste gespeichert ist. *(1 Punkte)*

M

WAHR ☒ FALSCH ☐

Zur Erinnerung: 2 zsh. $\Leftrightarrow$ Man muss mind. 2 Knoten entfernen, damit G nicht zsh.

Deshalb: k+1 zsh. $\Longrightarrow$ k zsh.

$\nexists$ Artikulationsknoten und Graph zsh. $\Longleftrightarrow$ 2 zsh.

9. Sei $e = \{u, v\}$ eine Brücke in einem Graph G. Dann ist u ein Artikulationsknoten, falls $\deg(u) \geq 2$.

WAHR ☒ FALSCH ☐

P

Gegenbeispiel:

Von 'AnW_week01'

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sei } G=(V,E) \text{ zsh.:}\\ \{x,y\}\in E \text{ Brücke} \longrightarrow \deg(x)=1 \text{ oder } x \text{ Artikulationsknoten}\end{array}}$$

Beweisskizze: $\{x,y\}$ Brücke $\Rightarrow G'=(V,E\setminus\{x,y\})$ nicht zsh.

insbesondere $\nexists$ x-y Pfad in G'. (1)

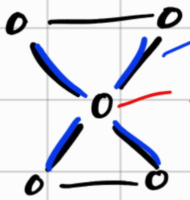
Wenn $\deg(x)\neq 1 \Rightarrow \exists \underset{}{u}\neq y$ ($\in V$) s.d. $\{x,u\}\in E'\ (=E\setminus\{x,y\})$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \nexists$ y-u Pfad in G'

$\Rightarrow$ Der einzige y-u Pfad in G führt über x

$\Rightarrow$ x ist ein Artikulationsknoten

Gegenbeispiel für Umkehrung:



Aber keine inzidente Kante ist eine Brücke.

x ist ein Art.-knoten

11. Ein Matching für das es keinen augmentierenden Pfad gibt ist kardinalitätsmaximal.

WAHR ☒ FALSCH ☐

Gegenbeispiel:

M

Wahr

Satz von Berge

Satz 1.48 (Satz von Berge). Ist M ein Matching in einem Graphen $G = (V, E)$, das nicht kardinalitätsmaximal ist, so existiert ein augmentierender Pfad zu M.

12. Für zwei Ereignisse A, B gilt immer $\Pr[A \mid B] \leq \Pr[A]$.

WAHR ☐ FALSCH ☒

Gegenbeispiel:

M/P

Falsch

Sei $A = B$, $0 < \Pr[A] = \Pr[B] < 1$

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B]}{\Pr[B]} = 1 > \Pr[A]$$

13. Sind X und Y zwei unabhängige Zufallsvariabeln, so sind auch die Zufallsvariabeln X^2 und Y^2 unabhängig.

WAHR ☒ FALSCH ☐

Gegenbeispiel:

M

Wahr!

Satz 2.55. Seien $f_1, \ldots, f_n$ reellwertige Funktionen ($f_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$). Wenn die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$.

14. Für jede Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}[X^2] = (\mathbb{E}[X])^2$.

WAHR ☐ FALSCH ☒

Gegenbeispiel:

M/P

Falsch

Sei $\Pr[X=1] = \frac{1}{2}, \quad \Pr[X=-1] = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in W_X} x^2 \cdot \Pr[X=x] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$$\mathbb{E}(X)^2 = \left(\sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X=x]\right)^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{0}}$$

15. Sei $X \geq 0$ eine nicht-negative Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = 10$. Dann gilt $\Pr[X \leq 1] \leq 1/10$.

WAHR ☐ FALSCH ☒

Gegenbeispiel:

Falsch.

Markov gilt für $\Pr[X \geq t]$

Satz 2.67. *(Ungleichung von Markov)* Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Oder äquivalent dazu $\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq 1/t$.

Sei X ZV. mit $Pr[X=20]=\frac{1}{2}$ und $Pr[X=0]=\frac{1}{2}$.

$\mathbb{E}(X)=10$ aber $\underline{Pr[X\leq 1]=\frac{1}{2}}>\frac{1}{10}$ ↯

(e) Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] = n \log n$ und $\operatorname{Var}[X] = n^2$. Zeigen Sie: Es gibt ein $C > 0$, sodass $\Pr[X \geq n \log n + C \cdot n] \leq 0.01$. *(4 Punkte)*

P

$$Pr[X \geq n\log n + Cn] = Pr[X \geq \mathbb{E}(X)+Cn]$$

$$= Pr[X-\mathbb{E}(X) \geq Cn]$$

$$\leq Pr[|X-\mathbb{E}(X)| \geq Cn]$$

$$\leq \frac{Var(X)}{(Cn)^2} = \frac{n^2}{C^2n^2} = \underline{\frac{1}{C^2} = 0.01}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{C=10}}$$

Satz 2.68. *(Ungleichung von Chebyshev)* Sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\operatorname{Var}[X]}{t^2}$$

oder äquivalent dazu $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\operatorname{Var}[X]}] \leq 1/t^2$.